需要の不確実性を考慮したロバストサプライチェイン均衡モデルにおける均衡解の存在性と一意性について

Existence and uniqueness properties of robust supply chain network equilibrium model with random demands

Yasushi Narushima* and Tatsuya Hirano†

July 1, 2019 (revised July 20, 2020)

1 はじめに

近年，企業経営におけるサプライチェインマネジメントの重要性が高まってきている．通常，サプライチェインでは複数のプロセスや意思決定主体が存在し，それらが密接に絡み合っているため，非常に複雑なネットワークであることがほとんどである．そのため，そのような状況を分析するために，サプライチェインにおける数理モデルは古くから盛んに研究されてきた．規模の大きなサプライチェインでは, その中心的な主体であってもネットワーク全体を把握しているとは限らない．そのため，企業間で競合が生じることも多い．そのような競合状態における均衡状態の分析も盛んであり, ゲーム理論などの均衡分析を用いて，様々な研究がされてきた．例えば，Nagurney et al. [10] はサプライチェインネットワーク均衡 (Supply Chain Network Equilibrium, SCNE) モデルを提案した．SCNE モデルでは, 複数の製造業者と小売業者と市場により構成されるネットワークについて, 均衡状態における製品の流通量や価格について分析が行われている．その後，SCNE モデルを拡張したモデルがいくつか提案されている [6,7,12,13]．例えば，Dong et al. [6] は, Nagurney et al. の SCNE モデルでは需要の不確実性が考慮されていないという点を改良するために, 市場における需要の不確実性を考慮したモデルを提案した．また，山田ら [12] は製造業者と小売業者と市場に加え，運送業者の 4 者によって構成される SCNE モデルを提案している．

一方，近年では事業継続計画などといった活動の高まりとともに，サプライチェインにおけるリスクマネジメントが注目されている．サプライチェインにおける数理モデルとしては，そのリスクを不確実性ととらえてロバストなサプライチェインのためのモデルの研究が盛んにおこなわらている (例えば, [2,5,7,8,11] など). SCNE モデルとリスクマネジメントを扱った研究として，Hirano and Narushima [7] は, ロバスト最適化やロバストな均衡分析 (例えば，[1,3,4] などを参照) の考えに基づき，各主体間の不確実性に着目し，自分以外の主体の行動を正確には知ることが出来ないという仮定の下で, 最悪の状況を想定して意思決定を行うようなロバスト SCNE モデルを考えた．しかしながら，平野・成島の研究では，Nagurney et al. の SCNE モデルと同様に市場における不確実性は考慮していなかった．よって本研究では, Dong et al. [6] と Hirano and Narushima [7] の考えを組み合わせて, 市場における需要の不確実性を考慮したロバスト SCNE モデルを提案する．

*Department of Industrial and Systems Engineering, Keio University 3-14-1 Hiyoshi Kouhoku-ku Yokohama, 223-8522, Japan . E-mail: narushima(at)ae.keio.ac.jp
†FUJITSU LIMITED

2　需要の不確実性を考慮したRSCNEモデル

本研究では, サプライチェインの上流から順に, m 個の製造業者, n 個の小売業者, n 個の市場が存在するネットワークを想定する. 製造業者は製品を製造し, それを小売業者へ供給する. 小売業者と市場は 1 対 1 に対応しており, 小売業者は仕入れた製品を, 対応する一つの市場へ販売する (図 1 参照). 製造業者は小売業者への供給量を, 小売業者は製造業者への発注量と市場への供給量を決定することで, 各々の費用を最小化する. 市場では, 後述する均衡条件を満たすように, 小売業者からの購入量と市場価格が決定される.

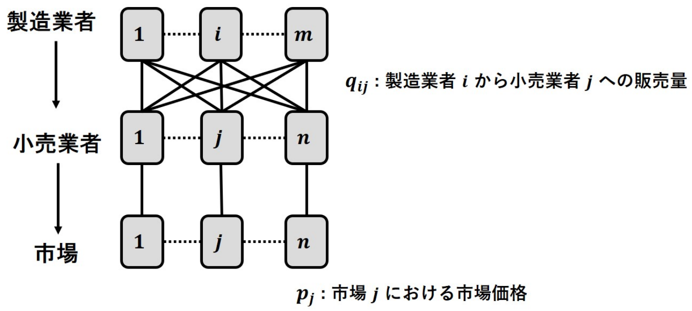

Figure 1: サプライチェインネットワークのイメージ

以下で，定式化に必要な記号を以下のように定義する (ただし，$i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n$ とする):

$$\begin{aligned} q_{ij} &: \text{製造業者 } i \text{ と小売業者 } j \text{ による製品取引量}, \\ \rho_{ij} &: \text{製造業者 } i \text{ から小売業者 } j \text{ へ配送される製品の販売価格}, \\ p_j &: \text{小売業者 } j \text{ から市場 } j \text{ へ提供される製品の販売価格}. \end{aligned}$$

これらの変数に対し, 変数をまとめたベクトルを以下のようにあらわす:

$$\begin{aligned} q_{i\cdot} &:= (q_{i1}, \cdots, q_{in})^T \in \mathbb{R}^n, \\ q_{\cdot j} &:= (q_{1j}, \cdots, q_{mj})^T \in \mathbb{R}^m, \\ q_{-i\cdot} &:= \left(q_{1\cdot}^T, \cdots, q_{i-1\cdot}^T, q_{i+1\cdot}^T, \cdots, q_{m\cdot}^T\right)^T \in \mathbb{R}^{n(m-1)}, \\ q_{\cdot -j} &:= \left(q_{\cdot 1}^T, \cdots, q_{\cdot j-1}^T, q_{\cdot j+1}^T, \cdots, q_{\cdot n}^T\right)^T \in \mathbb{R}^{m(n-1)}, \\ \rho_{i\cdot} &:= (\rho_{i1}, \cdots, \rho_{in})^T \in \mathbb{R}^n, \\ \rho_{\cdot j} &:= (\rho_{1j}, \cdots, \rho_{mj})^T \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

ここで, $q_{i\cdot}$ は製造業者 i の生産量 (つまり，戦略) を表し，$q_{\cdot j}$ は小売業者 j の戦略を表す．また，$q_{-i\cdot}$ は製造業者 i における製造業者 i 以外の製造業者の戦略を表し，$q_{\cdot -j}$ は小売業者 j における小売業者 j 以外の小売業者の戦略を表す．次に，製造業者や小売業者の費用を表す関数などを以下のように定義する:

$$\begin{aligned} f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) &: \text{製造業者 } i \text{ の製品製造費用関数}, \\ c_{ij}(q_{ij}) &: \text{製造業者 } i \text{ に関する小売業者 } j \text{ との取引費用関数}, \\ h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}) &: \text{小売業者 } j \text{ の製品取扱費用関数}, \\ \hat{d}_j(p_j) &: \text{市場 } j \text{ の製品需要}. \end{aligned}$$

製造業者の製品製造費用は他の製造業者の変数 (戦略) に依存し，小売業者の製品取り扱い費用関数は他の小売業者の変数に依存しているため，このネットワークは競合的なネットワークとなっている.

2.1　製造業者について

本節では，Hirano and Narushima [7] と同様の手順で製造業者の解く最適化問題を定式化し，その最適性条件を求める．以下では，製造業者 i $(i = 1, \cdots, m)$ の製造費用関数 f_i を以下の通りに

定義する:

$$f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) = \widehat{f}_i(q_{i\cdot}) + q_{i\cdot}^T B_{ii} q_{i\cdot} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} q_{i\cdot}^T B_{il} q_{l\cdot}\ . \tag{2.1}$$

ただし，$\widehat{f}_i$ は他の製造業者の変数に依存しない製造費用を表す関数であり，$B_{il} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\ell = 1,\ldots,m)$ はすべての要素が非負である行列である．したがって，製造業者 i 以外の生産量 q_{il} $(l \neq i)$ が増加した場合，式 (2.1) の右辺の第 3 項も増加する．これは，製造業者間に競合が生じている（例えば，原料の調達の競合など）ことを表現している．いま，製造業者 i $(i = 1,\cdots,m)$ の総利益のマイナス倍を $\Psi_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})$ とおけば，

$$\Psi_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) = -\rho_{i\cdot}^T q_{i\cdot} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(q_{ij}) + \widehat{f}_i(q_{i\cdot}) + q_{i\cdot}^T B_{ii} q_{i\cdot} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} q_{i\cdot}^T B_{il} q_{l\cdot}$$

となる. ここで, 製造業者 i は自分以外の製造業者の決定変数を正確に知ることが出来ず, 相手の戦略を $\tilde{q}_{l\cdot} = q_{l\cdot} + M_{il}\Delta u_l$ $(l = 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m)$ といった形式で認識するものとする. さらに自身にとって最悪のケースが生じたときの総費用を最小化するものとする. ただし, $M_{il} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を正定値対称行列であり, Δu_l は $\|\Delta u_l\| \leq 1$ を満たすものとする. この時，製造業者 i の製造業者 l $(l = 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m)$ に対する不確実性を表す集合 U_{il} は

$$U_{il} := \{\tilde{q}_{l\cdot} = q_{l\cdot} + M_{il}\Delta u_l |\ \|\Delta u_l\| \leq 1\}$$

と表すことができる. ここで，最悪のケースが起きたときの総費用を $\tilde{\Psi}_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})$ とおくと,

$$\tilde{\Psi}_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) = \max\left\{\Psi_i(q_{i\cdot}, \tilde{q}_{-i\cdot}) |\ \tilde{q}_{-i\cdot} \in U_{-i}\right\},$$

となる. ただし, $\tilde{q}_{-i\cdot} := \left((\tilde{q}_{1\cdot})^T,\cdots,(\tilde{q}_{i-1\cdot})^T,(\tilde{q}_{i+1\cdot})^T,\cdots,(\tilde{q}_{m\cdot})^T\right)^T, U_{-i} := \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{m} U_{il}$ である. 通常は $\tilde{\Psi}_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})$ は $\Psi_i(q_{i\cdot}, \tilde{q}_{-i\cdot})$ の上限 (sup) として表されるが, 今回は $\Psi_i(q_{i\cdot}, \tilde{q}_{-i\cdot})$ が連続で, かつ U_{-i} がコンパクトであるので, $\tilde{\Psi}_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})$ は $\Psi_i(q_{i\cdot}, \tilde{q}_{-i\cdot})$ の最大値として記しても差し支えない. したがって，製造業者 i が最小化すべき総費用関数は

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) &= -\rho_{i\cdot}^T q_{i\cdot} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(q_{ij}) + \widehat{f}_i(q_{i\cdot}) + q_{i\cdot}^T B_{ii} q_{i\cdot} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} q_{i\cdot}^T B_{il} q_{l\cdot} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} \max_{\|\Delta u_l\| \leq 1} q_{i\cdot}^T B_{il} M_{il} \Delta u_l \\
&= \rho_{i\cdot}^T q_{i\cdot} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(q_{ij}) + f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} \max_{\|\Delta u_l\| \leq 1} q_{i\cdot}^T B_{il} M_{il} \Delta u_l
\end{aligned}$$

となる. いま，ノルムの双対性より，$\displaystyle\max_{\|\Delta u_l\| \leq 1} q_{i\cdot}^T B_{il} M_{il} \Delta u_l = \|M_{il}^T B_{il}^T q_{i\cdot}\| = \|M_{il} B_{il}^T q_{i\cdot}\|$ であるから, 製造業者 i の戦略は次の二次錐計画問題の解となる:

$$\begin{aligned}
\min_{q_{i\cdot}, s_i} \quad & \widehat{\Psi}_i\left(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}, s_i\right) = -\rho_{i\cdot}^T q_{i\cdot} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(q_{ij}) + f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} s_{il} \\
\text{s.t.} \quad & 0 \leq q_{i\cdot},\ \|M_{il} B_{il}^T q_{i\cdot}\| \leq s_{il}\ (l = 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで $s_i := (s_{i1},\cdots,s_{ii-1},s_{ii+1},\cdots,s_{im})^T$ である. 問題 (2.2) の実行可能領域を T_i とおくと, T_i は次の通りとなる:

$$T_i := \left\{\left(q_{i\cdot}^T, s_i^T\right)^T\ |\ 0 \leq q_{i\cdot}, \left\|M_{il} B_{il}^T q_{i\cdot}\right\| \leq s_{il}\ (l = 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m)\right\}.$$

ここで，(2.2) の最適性条件は以下のようになる:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial f_i(q_{i\cdot}^*, q_{-i\cdot})}{\partial q_{ij}}+\frac{dc_{ij}(q_{ij}^*)}{dq_{ij}}-\rho_{ij}\right)\times\left(q_{ij}-q_{ij}^*\right)\right\}+\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{m}(s_{il}-s_{il}^*)\geq 0, \tag{2.3}$$

$$\forall\left(q_{i\cdot}^T, s_i^T\right)^T\in T_i.$$

ただし，$(q_{i\cdot}^*, s_i^*)$ を (2.2) の最適解とする．各製造業者の最適性条件 (2.3) を全ての製造業者についてまとめると次式が得られる:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial f_i(q_{i\cdot}^*, q_{-i\cdot}^*)}{\partial q_{ij}}+\frac{dc_{ij}(q_{ij}^*)}{dq_{ij}}-\rho_{ij}\right)\left(q_{ij}-q_{ij}^*\right)\right\}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{m}(s_{il}-s_{il}^*)\geq 0, \tag{2.4}$$

$$\forall\left(q^T, s^T\right)^T\in T.$$

ただし

$$T:=\left\{\left(q^T, s^T\right)^T \mid 0\leq q, \|M_{il}B_{il}^Tq_{i\cdot}\|\leq s_{il}\ (i=1,\cdots,m,\ l=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m)\right\},$$

とし，$q:=\left(q_{1\cdot}^T,\cdots,q_{m\cdot}^T\right)^T, s:=\left(s_1^T,\cdots,s_m^T\right)^T$ とする．

2.2 小売業者の問題

本節では，Dong et al. [6] と Hirano and Narushima [7] のモデルを組み合わせることで，小売業者の解く問題を定式化し，その最適性条件を導出する．まず, 小売業者 j $(j=1,\cdots,n)$ の製品取扱費用関数 h_j を製造業者における製造費用関数 f_i と同様に以下で定義する:

$$h_j\left(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}\right)=\widehat{h}_j(q_{\cdot j})+q_{\cdot j}^T\Gamma_{jj}q_{\cdot j}+\sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{n}q_{\cdot j}^T\Gamma_{jr}q_{\cdot r}\ . \tag{2.5}$$

ただし, $\widehat{h}_j$ は他の小売業者の変数に依存しない費用を表す関数であり，$\Gamma_{jr}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ $(r=1,\ldots,n)$ はすべての要素が非負である行列である．また, 製品の需要 $\hat{d}_j(p_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ は，パラメータ p_j を含む確率密度関数 $\mathcal{F}_j(x,p_j)$ を伴った確率変数であるとする．すなわち,

$$P_j(x,p_j)=P[\hat{d}_j(p_j)\leq x]=\int_0^x\mathcal{F}_j(t,p_j)dt \tag{2.6}$$

であるとする． また，$\hat{d}_j(p_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ の期待値を $d_j(p_j)$ で表すこととする．以下では, $\mathcal{F}_j(x,p_j)$ と $P_j(x,p_j)$ はともに (x,p_j) に関して連続であり，$d_j(p_j)$ は p_j に関して連続であると仮定する．

以降では簡単のために小売業者 j の総取引量を $Q_j=\sum_{i=1}^m q_{ij}$ で表すこととする．小売業者は仕入か需要のうち, 小さいほうしか売ることができないため，小売業者 j の販売量は $\min\left\{Q_j,\hat{d}_j(p_j)\right\}$ となる．また，在庫過剰 Δ_j^+ と欠品量 Δ_j^- はそれぞれ以下のようになる:

$$\Delta_j^+:=\max\left\{0, Q_j-\hat{d}_j(p_j)\right\},\quad \Delta_j^-:=\max\left\{0,\hat{d}_j(p_j)-Q_j\right\}.$$

また, Δ_j^+ と Δ_j^- の期待値を次の通りに記す:

$$\begin{aligned}e_j^+\left(Q_j,p_j\right)&\equiv E\left(\Delta_j^+\right)=\int_0^{Q_j}\left(Q_j-t\right)\mathcal{F}_j\left(t,p_j\right)dt,\\ e_j^-\left(Q_j,p_j\right)&\equiv E\left(\Delta_j^-\right)=\int_{Q_j}^{\infty}\left(t-Q_j\right)\mathcal{F}_j\left(t,p_j\right)dt.\end{aligned}$$

ここで在庫過剰と品切れに対するペナルティをそれぞれ λ_j^+, λ_j^- として与え, これらに関する損失額の期待値を,

$$E\left(\lambda_j^+\Delta_j^+ + \lambda_j^-\Delta_j^-\right) = \lambda_j^+ e_j^+\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^- e_j^-\left(Q_j, p_j\right)$$

とする. 売上は $p_j \min\left\{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\right\}$ となるから, 小売業者の総利益の期待値は

$$E\left(p_j \min\left\{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\right\}\right) - E\left(\lambda_j^+\Delta_j^+ + \lambda_j^-\Delta_j^-\right) - h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}) - \rho_j^T q_{\cdot j}$$

となる. ここで, $\min\left\{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\right\} = \hat{d}_j(p_j) - \Delta_j^-$ と表せるので, (2.5) より, 総利益の期待値のマイナス倍 Φ_j (便宜上, 総費用と呼ぶ) は

$$\begin{aligned}\Phi_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}, p_j) = &-p_j d_j(p_j) + p_j e_j^-\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^+ e_j^+\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^- e_j^-\left(Q_j, p_j\right)\\ &+ \rho_{\cdot j}^T q_{\cdot j} + \widehat{h}_j(q_{\cdot j}) + q_{\cdot j}^T \Gamma_{jj} q_{\cdot j} + \sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} q_{\cdot j}^T \Gamma_{jr} q_{\cdot r}\end{aligned}$$

となる. ここで小売業者も製造業者と同様に, 自分以外の小売業者の決定変数を正確に知ることができず, 誤差を含んだ状態で予測し, 自身にとって最悪のケースが起きたときの総費用を最小化するものとする. つまり, 小売業者 r $(r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)$ の決定変数 $q_{\cdot r}$ を $\tilde{q}_{\cdot r} := q_{\cdot r} + N_{jr}\Delta v_r$ $(r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)$ という形式でしか知ることが出来ないものとする. ただし, $N_{jr} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ は正定値対称行列であり, $\Delta v_r \in \mathbb{R}^m$ は $\|\Delta v_r\| \leq 1$ を満たすものとする. この時, 小売業者 j の小売業者 r $(r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)$ に対する不確実性を表す集合 V_{-j} は

$$V_{jr} := \{\tilde{q}_{\cdot r} = q_{\cdot r} + N_{jr}\Delta v_r |\ \|\Delta v_r\| \leq 1\}$$

であらわされる. ここで, 小売業者 j にとって最悪のケースが生じたときの総費用を $\tilde{\Phi}_i(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}, p_j)$ とおくと,

$$\tilde{\Phi}_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}, p_j) = \max\{\Phi_j(q_{\cdot j}, \tilde{q}_{\cdot -j}, p_j) |\ \tilde{q}_{\cdot -j} \in V_{-j}\}$$

となる. ただし, $\tilde{q}_{\cdot -j} := \left((\tilde{q}_{\cdot 1})^T, \cdots, (\tilde{q}_{\cdot j-1})^T, (\tilde{q}_{\cdot j+1})^T, \cdots, (\tilde{q}_{\cdot n})^T\right)^T$, $V_{-j} := \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} V_{jr}$ である. このとき, 小売業者 j が最小化すべき関数は次の通りである:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}, p_j) = &-p_i d_j(p_j) + p_j e_j^-\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^+ e_j^+\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^- e_j^-\left(Q_j, p_j\right)\\ &+ \rho_{\cdot j}^T q_{\cdot j} + h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}) + \sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} \max_{\|\Delta v_r\|\leq 1} q_{\cdot j}^T \Gamma_{jr} N_{jr}\Delta v_r\ .\end{aligned}$$

製造業者の場合と同様に考えると, 小売業者 j の戦略は以下の二次錐計画問題の解となる:

$$\begin{aligned}\min_{q_{\cdot j}, t_j}\quad \hat{\Phi}_j\left(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}, p_j, t_j\right) = \quad &-p_j d_j(p_j) + p_j e_j^-\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^+ e_j^+\left(Q_j, p_j\right) + \lambda_j^- e_j^-\left(Q_j, p_j\right)\\ &+\rho_{\cdot j}^T q_{\cdot j} + h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}) + \textstyle\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} t_{jr},\\ \text{s.t.}\quad 0 \leq q_{\cdot j},\ \|N_{jr}\Gamma_{jr}^T q_{\cdot j}\| \leq t_{jr} \qquad &(r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n).\end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし, $t_j := (t_{j1}, \cdots, t_{jj-1}, t_{jj+1}, \cdots, t_{jn})^T$ である. 問題 (2.7) の実行可能領域を S_j とおくと,

$$S_j := \left\{\left(q_{\cdot j}^T, t_j^T\right)^T\ \mid 0 \leq q_{\cdot j}, \|N_{jr}\Gamma_{jr}^T q_{\cdot j}\| \leq t_{jr}\ (r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)\right\}$$

となる. ここで, 単純な計算から

$$\frac{\partial e_j^+(Q_j, p_j)}{\partial q_{ij}} = P_j(Q_j, p_j), \qquad \frac{\partial e_j^-(Q_j, p_j)}{\partial q_{ij}} = P_j(Q_j, p_j) - 1$$

となるため，問題 (2.7) の最適性条件は次の通りとなる:

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\lambda_j^+ P_j(Q_j^*,p_j)-(\lambda_j^-+p_j)(1-P_j(Q_j^*,p_j))+\frac{\partial h_j(q_{\cdot j}^*,q_{\cdot -j})}{\partial q_{ij}}+\rho_{ij}\right\}(q_{ij}-q_{ij}^*)$$
$$+\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n}\left(t_{jr}-t_{jr}^*\right)\geq 0, \qquad \forall\left(q_{\cdot j}^T,t_j^T\right)^T\in S_j. \tag{2.8}$$

さらに，最適性条件 (2.8) を全ての小売業者についてまとめることで, 次式を得る:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left\{\lambda_j^+ P_j(Q_j^*,p_j)-(\lambda_j^-+p_j)(1-P_j(Q_j^*,p_j))+\frac{\partial h_j(q_{\cdot j}^*,q_{\cdot -j}^*)}{\partial q_{ij}}+\rho_{ij}\right\}(q_{ij}-q_{ij}^*)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n}\left(t_{jr}-t_{jr}^*\right)\geq 0, \qquad \forall\left(q^T,t^T\right)^T\in S. \tag{2.9}$$

ただし, $t:=\left(t_1^T,\cdots,t_n^T\right)^T$ とし,

$$S:=\left\{\left(q^T,t^T\right)^T\ \mid 0\leq q,\|N_{jr}\Gamma_{jr}^T q_{\cdot j}\|\leq t_{jr}\ (r=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,n)\right\}$$

とする.

2.3 市場の均衡条件

本論文では，Dong et al. [6] に倣い，市場 j $(j=1,\cdots,n)$ では, 均衡状態において，以下の条件が満たすような p_j $(j=1,\cdots,n)$ が選択されるものと仮定する:

$$\begin{cases} \hat{d}_j(p_j)\leq\sum_{i=1}^m q_{ij} & \text{almost everywhere,} \quad \text{if} \quad p_j=0,\\ \hat{d}_j(p_j)=\sum_{i=1}^m q_{ij} & \text{almost everywhere,} \quad \text{if} \quad p_j>0.\end{cases} \tag{2.10}$$

上記の均衡条件は，よく知られた経済的な均衡条件に対応している．詳細は [6,9] などを参照されたい. なお，(2.10) を満たす p_j を求めることは, 以下の不等式を満たす p_j^* を求めることと等価である:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(Q_j^*-d_j(p_j^*)\right)\left(p_j-p_j^*\right)\right\}\geq 0,\ \forall p\in\mathbb{R}_+^n.$$

ただし，$p=(p_1,\ldots,p_n)^T$ とする.

2.4 変分不等式問題への定式化

最適性条件 (2.4), (2.9) と均衡条件 (2.10) より, 以下の変分不等式問題が得られる:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial f_i(q_{i\cdot}^*,q_{-i\cdot}^*)}{\partial q_{ij}}+\frac{\partial c_{ij}(q_{ij}^*)}{\partial q_{ij}}+\frac{\partial h_j(q_{\cdot j}^*,q_{\cdot -j}^*)}{\partial q_{ij}}+\lambda_j^+ P_j\left(Q_j^*,p_j^*\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\lambda_j^-+p_j^*\right)\left(1-P_j\left(Q_j^*,p_j^*\right)\right)\right\}\left(q_{ij}-q_{ij}^*\right)\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(Q_j^*-d_j(p_j^*)\right)\left(p_j-p_j^*\right)\right\}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}(s_{il}-s_{il}^*)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n}(t_{jr}-t_{jr}^*)\geq 0,$$
$$\forall x=(q^T,p^T,s^T,t^T)^T\in K. \tag{2.11}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
K =\{ & \left(q^T, p^T, s^T, t^T\right)^T \mid 0 \leq q_{i\cdot}, 0 \leq p_j, \|M_{il} B_{il}^T q_{i\cdot}\| \leq s_{il}, \|N_{jr} \Gamma_{jr}^T q_{\cdot j}\| \leq t_{jr} \\
& (i = 1, \cdots, m, \quad l = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m, \\
& \quad j = 1, \cdots, n, \quad r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)\}
\end{aligned}
$$

とする．今後は, この変分不等式問題を

$$
\text{Find } x^* \in K \text{ such that } F(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, \ \forall x \in K \tag{2.12}
$$

と表記する．ただし,

$$
F(x) := \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1(q_{1\cdot}, q_{-1\cdot})}{\partial q_{11}} + \frac{\partial c_{11}(q_{11})}{\partial q_{11}} + \frac{\partial h_1(q_{\cdot 1}, q_{\cdot -1})}{\partial q_{11}} + \lambda_1^+ P_1(Q_1, p_1) - \left(\lambda_1^- + p_1\right)(1 - P_1(Q_1, p_1)) \\
\vdots \\
\frac{\partial f_1(q_{1\cdot}, q_{-1\cdot})}{\partial q_{1n}} + \frac{\partial c_{1n}(q_{1n})}{\partial q_{1n}} + \frac{\partial h_n(q_{\cdot n}, q_{\cdot -n})}{\partial q_{1n}} + \lambda_n^+ P_n(Q_n, p_n) - \left(\lambda_n^- + p_n\right)(1 - P_n(Q_n, p_n)) \\
\vdots \\
\frac{\partial f_m(q_{m\cdot}, q_{-m\cdot})}{\partial q_{m1}} + \frac{\partial c_{m1}(q_{m1})}{\partial q_{m1}} + \frac{\partial h_1(q_{\cdot 1}, q_{\cdot -1})}{\partial q_{m1}} + \lambda_1^+ P_1(Q_1, p_1) - \left(\lambda_1^- + p_1\right)(1 - P_1(Q_1, p_1)) \\
\vdots \\
\frac{\partial f_m(q_{m\cdot}, q_{-m\cdot})}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial c_{mn}(q_{mn})}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial h_n(q_{\cdot n}, q_{\cdot -n})}{\partial q_{mn}} + \lambda_n^+ P_n(Q_n, p_n) - \left(\lambda_n^- + p_n\right)(1 - P_n(Q_n, p_n)) \\
Q_1 - d_1(p_1) \\
\vdots \\
Q_n - d_n(p_n) \\
1 \\
\vdots \\
1
\end{pmatrix}
$$

である．

3　変分不等式問題の解の存在性・唯一性

本節では，2 節で定式化した変分不等式問題 (2.11) の解の存在性と唯一性を議論する．まず最初に，解の存在性について考える．以下では十分大きな正の定数 b_1 b_2, b_3, b_4 に対して，集合 K^b を次の通りに定義する．

$$
\begin{aligned}
K^b =\{ & \left(q^T, p^T, s^T, t^T\right)^T \mid 0 \leq q_{ij} \leq b_1, 0 \leq p_j \leq b_2, \|M_{il} B_{il}^T q_{i\cdot}\| \leq s_{il} \leq b_3, \|N_{jr} \Gamma_{jr}^T q_{\cdot j}\| \leq t_{jr} \leq b_4 \\
& (i = 1, \cdots, m, \ l = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n, \ r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)\}
\end{aligned}
$$

b_1–b_4 が十分大きい場合，K^b は空でないコンパクト集合となるため, 以下の変分不等式問題

$$
\text{Find } x^b \in K^b \text{ such that } F(x^b)^T (x - x^b) \geq 0, \forall x \in K^b \tag{3.1}
$$

は少なくとも一つの解を持つ．ここで, 以下の補題を紹介する [9].

補題 1. 変分不等式問題 (2.11) が解を持つための必要十分条件は, 変分不等式問題 (3.1) が

$$
\begin{aligned}
& q_{ij}^b < b_1, \qquad p_j^b < b_2, \qquad s_{il}^b < b_3, \qquad t_{jr}^b < b_4 \\
& \qquad \text{for all } i = 1, \cdots, m, \ l = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m, \\
& \qquad \qquad j = 1, \cdots, n, \ r = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

を満たすような解 $x^b = \left((q^b)^T, (p^b)^T, (s^b)^T, (t^b)^T\right)^T$ を持つことである．

ここで，解の存在性を保証するために以下の仮定を与える．

仮定 1. ある正の定数 $N,\ M$ が存在して，$q_{ij} \geq N$ を満たす $\forall q_{ij}$ について，

$$\frac{\partial f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial c_{ij}(q_{ij})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j})}{\partial q_{ij}} + \lambda_j^+ P_j\left(Q_j, p_j\right) - \left(\lambda_j^- + p_j\right)\left(1 - P_j\left(Q_j, p_j\right)\right) \geq M \quad (3.2)$$

が成り立つ．

この仮定は，ある程度の流通量（q_{ij}）が存在する場合には製品取り扱い費用関数など ($f_i,\ c_{ij},\ h_j$) の限界費用が大きくなることを意味しており，現実的な仮定であるといえる．仮定 1 のもとで補題 1 を用いることで, 以下の解の存在性についての定理が得られる．

定理 2. 仮定 1 が満たされているとき, 変分不等式問題 (2.11) は少なくとも解を一つ持つ．

Proof. まず，$b_1 = N$ とする．このとき，$f_i,\ c_{ij},\ h_j$ はそれぞれ連続微分可能であるので，コンパクトな領域 $q_{ij} \in [0, b_1]\ (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ 上で最大値を持つ．したがって，正の定数 $\eta > 1$ が存在して

$$\eta \geq \max_{\forall i,j,\ q_{ij} \in [0, b_1]} \left\{ \frac{\partial f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial c_{ij}(q_{ij})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j})}{\partial q_{ij}} + \lambda_j^+ \right\} \quad (3.3)$$

を満たす．

次に，任意の $j = 1, \ldots, n$ に対して

$$q_{ij} \in [0, b_1],\ p_j \in [0, b_2],\ Q_j \leq d_j(p_j) \quad (3.4)$$

ならば,

$$P_j(Q_j, p_j) \neq 1 \quad (3.5)$$

であることを背理法で示す．よって，

$$P(Q_j, p_j) = \int_0^{Q_j} \mathcal{F}_j(t, p_j) dt = 1$$

を仮定すると，

$$\int_{Q_j}^{\infty} \mathcal{F}_j(t, p_j) dt = 1 - P(Q_j, p_j) = 0$$

となる．ここで，$\mathcal{F}_j$ は連続なので，$t \in (Q_j, \infty)$ において $\mathcal{F}_j(t, p_j) = 0$ が成立する．したがって，

$$\begin{aligned} Q_j \leq d_j(p_j) = \int_0^{\infty} t\mathcal{F}_j(t, p_j) dt &= \int_0^{Q_j} t\mathcal{F}_j(t, p_j) dt + \int_{Q_j}^{\infty} t\mathcal{F}_j(t, p_j) dt \\ &\leq Q_j \int_0^{Q_j} \mathcal{F}_j(t, p_j) dt = Q_j P_j(Q_j, p_j) = Q_j \end{aligned}$$

より，$Q_j = d_j(p_j)$ となる．さらに，$\mathcal{F}_j$ は連続な確率密度関数なので，上記の不等号が等式で成り立つのは $Q_j = 0$ の時のみである．したがって，$Q_j = d_j(p_j) = 0$ となるが，このとき，

$$P(Q_j, p_j) = \int_0^{Q_j} \mathcal{F}_j(t, p_j) dt = 0$$

となるので，背理法の仮定に矛盾する．したがって，(3.5) が示された．ここで，d_j は連続なので，(3.4) を満たす領域はコンパクトである．よって，P_j の連続性から, 1 未満の最大値が存在する．したがって，定数 $\epsilon \in (0, 1]$ が存在して

$$P_j(Q_j, p_j) \leq 1 - \epsilon \quad (3.6)$$

を満たす．ここで，$b_2 = \eta/\epsilon$ とし，b_3, b_4 は十分大きな正の定数であるとする．このとき, 変分不等式問題 (3.1) の解が補題 1 の仮定を満たすことを証明する．

1. $q_{uv}^b = b_1(= N)$ となる (u,v) が存在すると仮定する．このとき，(2.11) において，$q_{ij} = q_{ij}^b((i,j) \neq (u,v)), p = p^b, s = s^b, t = t^b$ とおくと，

$$\frac{\partial f_u(q_{u\cdot}^b, q_{-u\cdot}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial c_{uv}(q_{uv}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial h_v(q_{\cdot v}^b, q_{\cdot -v}^b)}{\partial q_{uv}} + \lambda_v^+ P_v\left(Q_v^b, p_v^b\right) - \left(\lambda_v^- + p_v^b\right)\left(1 - P_v\left(Q_v^b, p_v^b\right)\right) \leq 0$$

が得られるが，これは (3.2) と矛盾する．したがって，任意の (u,v) に対して，$q_{u,v}^b < b_1$ である．

2. $p_v^b = b_2(= \eta/\epsilon)$ となる v が存在すると仮定する．このとき，(2.11) において，$p_j = p_j^b$ $(j \neq v)$，$q = q^b$，$s = s^b$，$t = t^b$ とおくと，

$$Q_v^b \leq d_v(p_v^b)$$

が得られる．したがって，(3.4) を満たしているので (3.6) を満たす $\epsilon \in (0,1]$ が存在する．一方，任意の u に対し，$q_{uv} = b_1$，$q_{ij} = q_{ij}^b((i,j) \neq (u,v))$，$p = p^b$，$s = s^b$，$t = t^b$ とおくと，任意の (i,j) に対して $q_{ij}^b < b_1$ であるので，(2.11) から

$$\frac{\partial f_u(q_{u\cdot}^b, q_{-u\cdot}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial c_{uv}(q_{uv}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial h_v(q_{\cdot v}^b, q_{\cdot -v}^b)}{\partial q_{uv}} + \lambda_v^+ P_v\left(Q_v^b, b_2\right) - \left(\lambda_v^- + b_2\right)\left(1 - P_v\left(Q_v^b, b_2\right)\right) \geq 0$$

が得られる．したがって，(3.6) と $\lambda_v^- \geq 0$ より、

$$\frac{1}{\epsilon}\left\{\frac{\partial f_u(q_{u\cdot}^b, q_{-u\cdot}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial c_{uv}(q_{uv}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial h_v(q_{\cdot v}^b, q_{\cdot -v}^b)}{\partial q_{uv}} + \lambda_v^+ P_v\left(Q_v^b, b_2\right)\right\} \geq b_2 \tag{3.7}$$

が得られる．一方，(3.3) より

$$b_2 = \frac{\eta}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}\left\{\frac{\partial f_u(q_{u\cdot}^b, q_{-u\cdot}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial c_{uv}(q_{uv}^b)}{\partial q_{uv}} + \frac{\partial h_v(q_{\cdot v}^b, q_{\cdot -v}^b)}{\partial q_{uv}} + \lambda_v^+ P_v\left(Q_v^b, b_2\right)\right\}$$

が成り立つが，これは (3.7) に矛盾している．したがって，任意の v に対して，$p_v^b < b_2$ である．

3. $s_{uc} = b_3$ となるような (u,c) が存在すると仮定する．このとき，(2.11) において，$q = q^b, p = p^b, s_{il} = s_{il}^b$ $((i,l) \neq (u,c)), t = t^b$ とおけば，

$$s_{uc} - s_{uc}^b \geq 0, \quad \forall s_{uc} \leq b_3 \tag{3.8}$$

となるが，$s_{uc} < s_{uc}^b$ のとき，(3.8) は成立せず，矛盾する．したがって，任意の (u,c) に対して $s_{uc}^b < b_3$ である．

4. $t_{vd} = b_4$ となるような (v,d) が存在すると仮定する．このとき，(2.11) において，$q = q^b, p = p^b, s = s^b, t_{jr} = t_{jr}^b$ $((j,r) \neq (v,d))$ とおくと，

$$t_{vd} - t_{vd}^b \geq 0, \quad \forall t_{vd} \leq b_4 \tag{3.9}$$

となるが，$t_{vd} < t_{vd}^b$ のとき，(3.9) は成立せず，矛盾する．したがって，任意の (v,d) に対して $t_{vd}^b < b_4$ である．

以上より，補題 1 から，変分不等式問題 (2.11) は少なくとも一つの解を持つ． □

次に解の唯一性について考える．変分不等式問題の解の唯一性に関して以下の一般的な結果が知られている．

補題 3. 変分不等式問題 (2.12) において，F が狭義単調であるとする．このとき，(2.12) に解が存在するならば一意である．

次に，準備として $j=1,\cdots,n$ に対して, 関数

$$g_j(Q_j,p_j) := \begin{pmatrix} \lambda_j^+ P_j(Q_j,p_j) - \left(\lambda_j^- + p_j\right)(1-P_j(Q_j,p_j)) \\ Q_j - d_j(p_j) \end{pmatrix}$$

を定義する．ここで以下の補題を紹介する．証明は [6] で与えられているが，より簡潔な証明を与えておくこととする．

補題 4. 関数 g_j が単調であるための必要十分条件は

$$d_j'(p_j) \leq -\left(4\alpha_j \mathcal{F}_j(Q_j,p_j)\right)^{-1} \left(P_j(Q_j,p_j) + \alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j}\right)^2 \tag{3.10}$$

である．ただし，$\alpha_j = \lambda_j^+ + \lambda_j^- + p_j$ とする．

Proof. まず，g_j の勾配ベクトルを考えると

$$\begin{aligned} \nabla g_j(Q_j,p_j) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left\{\lambda_j^+ P_j(Q_j,p_j) - \left(\lambda_j^- + p_j\right)(1-P_j(Q_j,p_j))\right\}}{\partial Q_j} & \frac{\partial\left\{\lambda_j^+ P_j(Q_j,p_j) - \left(\lambda_j^- + p_j\right)(1-P_j(Q_j,p_j))\right\}}{\partial p_j} \\ \frac{\partial(Q_j - d_j(p_j))}{\partial Q_j} & \frac{\partial(Q_j - d_j(p_j))}{\partial p_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_j^+ + \lambda_j^- + p_j)\mathcal{F}_j(Q_j,p_j) & (\lambda_j^+ + \lambda_j^- + p_j)\frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j} - 1 + P_j(Q_j,p_j) \\ 1 & -d_j'(p_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_j \mathcal{F}_j(Q_j,p_j) & \alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j} - 1 + P_j(Q_j,p_j) \\ 1 & -d_j'(p_j) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．ここで，$H_j := \frac{1}{2}\left(\nabla g_j(Q_j,p_j) + \nabla g_j(Q_j,p_j)^T\right)$ と定義すると, H_j は

$$H_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \mathcal{F}_j(Q_j,p_j) & \frac{1}{2}\left(\alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j} + P_j(Q_j,p_j)\right) \\ \frac{1}{2}\left(\alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j} + P_j(Q_j,p_j)\right) & -d_j'(p_j) \end{pmatrix}$$

となる．g_i が単調となる必要十分条件は H_j の首座小行列式がすべて 0 以上となることである．1 次の首座小行列式の $\alpha_j \mathcal{F}_j(Q_j,p_j)$ は明らかに非負である．一方, 2 次の首座小行列式は

$$\alpha_j \mathcal{F}_j(Q_j,p_j)\, d_j'(p_j) - \frac{1}{4}\left(\alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j} + P_j(Q_j,p_j)\right)^2$$

となる．これが非負となるための必要十分条件は

$$d_j'(p_j) \leq -\left(4\alpha_j \mathcal{F}_j(Q_j,p_j)\right)^{-1} \left(\alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j,p_j)}{\partial p_j} + P_j(Q_j,p_j)\right)$$

となる．したがって，題意は証明された． □

小売業者 j から市場 j へ提供される製品の販売価格 p_j は非負であるため，α_j は正となる．したがって，(3.10) の右辺は負である．よって，条件 (3.10) は，市場 j における製品の需要の期待値 d_j は製品価格 p_j に関する強い意味での減少関数であることを表している．

補題 3 と 4 を用いることで, 変分不等式問題 (2.11) の解の唯一性について以下の定理を得る．

定理 5. 補題 4 の仮定が成り立っているとし，さらに $\widehat{f}_i$, c_{ij}, $\widehat{h}_j$ $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ のうち狭義単調であるものが少なくとも一つ存在すると仮定する．この時，変分不等式問題 (2.11) は解を持つならば唯一である．

Proof. 任意の $x^{(a)}, x^{(b)} \in K$ について,

$$
\begin{aligned}
&\left(F(x^{(a)}) - F\left(x^{(b)}\right)\right)^T \left(x^{(a)} - x^{(b)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\nabla_{q_{i\cdot}} f_i \left(q_{i\cdot}^{(a)}, q_{-i\cdot}^{(a)}\right) - \nabla_{q_{i\cdot}} f_i \left(q_{i\cdot}^{(b)}, q_{-i\cdot}^{(b)}\right)\right)^T \left(q_{i\cdot}^{(a)} - q_{i\cdot}^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(\frac{dc_{ij}\left(q_{ij}^{(a)}\right)}{dq_{ij}} - \frac{dc_{ij}\left(q_{ij}^{(b)}\right)}{dq_{ij}} \right) \left(q_{ij}^{(a)} - q_{ij}^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(\nabla_{q_{\cdot j}} h_j \left(q_{\cdot j}^{(a)}, q_{\cdot -j}^{(a)}\right) - \nabla_{q_{\cdot j}} h_j \left(q_{\cdot j}^{(b)}, q_{\cdot -j}^{(b)}\right)\right)^T \left(q_{\cdot j}^{(a)} - q_{\cdot j}^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\lambda_j^+ P_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right) - \lambda_j^+ P_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right) \left(q_{ij}^{(a)} - q_{ij}^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(-\lambda_j^- \left(1 - P_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right)\right) + \lambda_j^- \left(1 - P_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right)\right)^T \left(q_{ij}^{(a)} - q_{ij}^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(-p_j^{(a)} \left(1 - P_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right)\right) + p_j^{(b)} \left(1 - P_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right)\right) \left(q_{ij}^{(a)} - q_{ij}^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(Q_j^{(a)} - d_j\left(p_j^{(a)}\right) - Q_j^{(b)} + d_j\left(p_j^{(b)}\right)\right) \left(p_j^{(a)} - p_j^{(b)}\right) \right\}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

となる．ここで, $f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot})$ $(i = 1, \cdots, m)$ は $q_{i\cdot}$ について凸であるから, $\nabla_{q_{i\cdot}} f_i \left(q_{i\cdot}^{(a)}, q_{-i\cdot}^{(a)}\right)$ は単調, つまり

$$
\sum_{i=1}^{m} \left(\nabla_{q_{i\cdot}} f_i \left(q_{i\cdot}^{(a)}, q_{-i\cdot}^{(a)}\right) - \nabla_{q_{i\cdot}} f_i \left(q_{i\cdot}^{(b)}, q_{-i\cdot}^{(b)}\right)\right)^T \left(q_{i\cdot}^{(a)} - q_{i\cdot}^{(b)}\right) \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{3.12}
$$

である．$h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j})$ $(j = 1, \cdots, n)$ も同様に, $q_{\cdot j}$ について凸であるから, $\nabla_{q_{\cdot j}} h_j \left(q_{\cdot j}^{(a)}, q_{\cdot -j}^{(a)}\right)$ は単調, すなわち

$$
\sum_{i=1}^{m} \left(\nabla_{q_{\cdot j}} h_j \left(q_{\cdot j}^{(a)}, q_{\cdot -j}^{(a)}\right) - \nabla_{q_{\cdot j}} h_j \left(q_{\cdot j}^{(b)}, q_{\cdot -j}^{(b)}\right)\right)^T \left(q_{\cdot j}^{(a)} - q_{\cdot j}^{(b)}\right) \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{3.13}
$$

である．さらに, $c_{ij}(q_{ij})$ $(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$ は凸であるため,

$$
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(\frac{dc_{ij}\left(q_{ij}^{(a)}\right)}{dq_{ij}} - \frac{dc_{ij}\left(q_{ij}^{(b)}\right)}{dq_{ij}} \right) \left(q_{ij}^{(a)} - q_{ij}^{(b)}\right) \right\} \geq 0 \tag{3.14}
$$

である．また, (3.10) より, g_j は単調である．したがって，任意の $j = 1, \ldots, n$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left(g_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right) - g_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right)^T \begin{pmatrix} Q_j^{(a)} - Q_j^{(b)} \\ p_j^{(a)} - p_j^{(b)} \end{pmatrix} \\
&= \left(\lambda_j^+ P_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right) - \lambda_j^+ P_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right) \left(Q_j^{(a)} - Q_j^{(b)}\right) \\
&\quad + \left\{ -\lambda_j^- \left(1 - P_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right)\right) + \lambda_j^- \left(1 - P_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right) \left(Q_j^{(a)} - Q_j^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \left\{ -p_j^{(a)} \left(1 - P_j\left(Q_j^{(a)}, p_j^{(a)}\right)\right) + p_j^{(b)} \left(1 - P_j\left(Q_j^{(b)}, p_j^{(b)}\right)\right) \left(Q_j^{(a)} - Q_j^{(b)}\right) \right\} \\
&\quad + \left(Q_j^{(a)} - d_j\left(p_j^{(a)}\right) - Q_j^{(b)} + d_j\left(p_j^{(b)}\right)\right) \left(p_j^{(a)} - p_j^{(b)}\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

が成立する．よって, (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) より,

$$\left(F\left(x^{(a)}\right)-F\left(x^{(b)}\right)\right)^T\left(x^{(a)}-x^{(b)}\right)\geq 0$$

となり, $F(x)$ は単調である．ここで仮定より，$\widehat{f_i}$,c_{ij}, $\widehat{h}_j$ $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ のうち狭義単調であるものが少なくとも一つ存在するので，(3.12), (3.13), (3.14) の不等式のうち，少なくとも一つは狭義に成り立つ．したがって,

$$\left(F\left(x^{(a)}\right)-F\left(x^{(b)}\right)\right)^T\left(x^{(a)}-x^{(b)}\right)> 0$$

であるから, $F(x)$ は狭義単調である．したがって補題 3 より，変分不等式問題 (2.11) は解を持つならば唯一である． □

4 おわりに

本論文では，需要の変動を考慮したロバストサプライチェインネットワーク均衡モデルを定式化し，それを変分不等式問題へと再定式化して均衡解の存在性や唯一性について議論した．より一般的なネットワークへの拡張や数値実験などは今後の課題である．

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費基盤研究 (C)(課題番号 18K11179)，および基盤研究 (B)(課題番号 18H00882) の助成を受けて行われている．

References

[1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, *Mathematical Programming*, **107** (2006), 231–273.

[2] A. Baghalian, S. Rezapour and R.Z. Farahani, Robust supply chain network design with service level against disruptions and demand uncertainties: A real-life case. *European Journal of Operational Research*, **227** (2013), 199–215.

[3] A. Ben-Tal, L.E. Ghaoui and A. Nemirovski, Robust optimization. *Princeton University Press, UK*, 2009.

[4] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, **23** (1998), 769–805.

[5] D. Bertsimas and A. Thiele, A robust optimization approach to supply chain management. In: D. Bienstock and G. Nemhauser eds. *Integer programming and combinatorial optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004), 86–100.

[6] J. Dong, D. Zhang and A. Nagurney, A supply chain network equilibrium model with random demands. *European Journal of Operational Research*, **156** (2004), 194–212.

[7] T. Hirano and Y. Narushima, Robust supply chain network equilibrium model, *Transportation Science*, **53** (2019), 1196–1212.

[8] P.R. Kleindorfer and G.H. Saad, Managing disruption risks in supply chains. *Production and Operations Management*, **14** (2005), 53–68.

[9] A. Nagurney, Network Economics: A Variational Inequality Approach, Springer, 1993.

[10] A. Nagurney, J. Dong and D. Zhang, A supply chain network equilibrium model. *Transportation Research Part E*, **38** (2002), 281–303.

[11] M.S. Pishvaee, M. Rabbani and S.A. Torabi, A robust optimization approach to closed-loop supply chain network design under uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, **35** (2011), 637–649.

[12] 山田忠史 今井康治 谷口栄一, 物流業者の行動を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡分析, 土木学会論文集 D, **65** (2009), 163–174.

[13] 山田忠史 繁田健 今井康治 谷口栄一, 在庫を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡モデル：消費需要の不確実性に伴う物資流動量とネットワーク効率性の変化, 土木学会論文集 D, **66** (2010), 359–368.